Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

zakh@cs.msu.su

Лекция 4.

Подстановки.
Табличный вывод.
Корректность табличного вывода.

Подстановки

Подстановка — это всякое отображение $\theta : Var \to Term$, сопоставляющее каждой переменной некоторый терм. Подстановки нужны для того, чтобы иметь возможность переходить от общих утверждений $\forall x \forall y P(x, y)$ к их частным вариантам $P(f(z), c)$.

Множество $Dom_\theta = \{x : \theta(x) \neq x\}$ называется областью подстановки . Если область подстановки — это конечное множество переменных, то такая подстановка называется конечной. Множество конечных подстановок обозначим Subst .

Если $\theta \in Subst$ и $Dom_\theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то подстановка θ однозначно определяется множеством пар

$$\{x_1/\theta(x_1), x_2/\theta(x_2), \dots, x_n/\theta(x_n)\}.$$

Каждая пара $x_i/\theta(x_i)$ называется связкой .

ПОДСТАНОВКИ

Для заданного логического выражения E и подстановки θ запись $E\theta$ обозначает результат применения подстановки θ к E, который определется так:

Если $E = x,\ x \in Var$, то $E\theta = \theta(x)$;

Если $E = c,\ c \in Const$, то $E\theta = c$;

Если $E = f(t_1, t_2, \dots, t_k)$, то $E\theta = f(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_n\theta)$;

Если $E = P(t_1, t_2, \dots, t_k)$, то $E\theta = P(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_n\theta)$;

Если $E = \varphi \& \psi$, то $E\theta = \varphi\theta \ \& \ \psi\theta$
(аналогично для формул $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$);

Если $E = \forall x_0\ \varphi$, то $E\theta = \forall x_0\ (\varphi\theta')$, где η — новая подстановка, удовлетворяющая условию

$$\theta'(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } x = x_0, \\ \theta(x), & \text{если } x \neq x_0, \end{cases}$$

(аналогично для формул $\exists x_0\ \varphi$).

ПОДСТАНОВКИ

Пример

$\varphi\ : \forall x(P(x)\ \rightarrow\ \neg R(y))\ \rightarrow\ R(f(x))\ \vee\ \exists y P(y)$

$\theta = \{\ x/g(x,c),\ y/x,\ z/f(z)\ \}$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$\varphi\ : \forall x(P(x)\ \rightarrow\ \neg R(y))\ \rightarrow\ R(f(x))\ \vee\ \exists y P(y)$

К свободным вхождениям переменных применяется θ

$\varphi\theta\ : \forall x(P(x)\ \rightarrow\ \neg R(x))\ \rightarrow\ R(f(g(x,c)))\ \vee\ \exists y P(y)$

ПОДСТАНОВКИ

В результате применения некоторых подстановок смысл утверждений (формул) может значительно исказиться.

«Если у каждого есть дед, то у субъекта x тоже есть дед»

$\varphi(x)\ :\ \forall x \exists y P(x, y)\ \rightarrow\ \exists y P(x, y)$

Очевидно, $\models \varphi(x)$

Применим к $\varphi(x)$ подстановку $\theta = \{\ x/y\ \}$

$\varphi(x)\theta\ :\ \forall x \exists y P(x, y)\ \rightarrow\ \exists y P(y, y)$

«Если у каждого есть дед, то есть и такие, которые приходятся дедом самим себе»

Очевидно, $\not\models \varphi(x)\theta$

Как странно: общее утверждение $\varphi(x)$ верно, а его частный случай $\varphi(x)\theta$ — нет.

ПОДСТАНОВКИ

Переменная x называется свободной для терма t в формуле $\varphi(x)$, если любое свободное вхождение переменной x в формуле $\varphi(x)$ не лежит в области действия ни одного квантора, связывающего переменную из множества Var_t.

Подстановка $\theta = \{\, x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ называется правильной для формулы φ, если для любой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ.

Пример

Переменная y **не является** свободной для терма $f(x, z)$ в формуле φ

$\varphi\ : \forall x(P(x) \ \rightarrow\ \neg R(y)) \ \rightarrow\ R(f(x)) \ \vee\ \exists y P(y)$

А вот для терма $f(y, z)$ переменная y в формуле φ свободна.

Табличный вывод

Правила табличного вывода имеют вид

$$\frac{T_0}{T_1} \qquad \text{или} \qquad \frac{T_0}{T_1, \quad T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы. Прочтение правила таково:

Таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или T_2).

В тех случаях, когда таблица T_0 редуцируется в пару таблиц T_1, T_2, будем говорить, что правило имеет альтернативы.

Табличный вывод

Правила табличного вывода

$L\&$ $$\frac{\langle \Gamma, \varphi\&\psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi | \Delta \rangle}$$

$R\&$ $$\frac{\langle \Gamma | \Delta, \varphi\&\psi \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$L\vee$ $$\frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi | \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle}$$

$R\vee$ $$\frac{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$L \rightarrow$ $$\frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}$$

$R \rightarrow$ $$\frac{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi | \Delta, \psi \rangle}$$

$L\neg$ $$\frac{\langle \Gamma, \neg\varphi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \rangle}$$

$R\neg$ $$\frac{\langle \Gamma | \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi | \Delta \rangle}$$

Табличный вывод

Правила табличного вывода

$L\forall \quad \dfrac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$

переменная x свободна для терма t
в формуле $\varphi(x)$

$R\forall \quad \dfrac{\langle \Gamma | \Delta, \forall x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi(x)\{x/c\} \rangle}$

константа c не содержится в формулах
из Γ, Δ и в формуле $\varphi(x)$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\exists \quad \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle}$$

константа c не содержится в формулах из Γ, Δ и в формуле $\varphi(x)$

$$R\exists \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(x)$

Табличный вывод

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\forall$ не придерживаться правильных подстановок, то **выполнимая таблица**

$$- L\forall : \frac{\langle\ \forall x \exists y R(x, y) \mid \exists y R(y, y)\ \rangle}{\langle\ \forall x \exists y R(x, y),\ \exists y R(y, y) \mid \exists y R(y, y)\ \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу** .

Причина в том, что переменная **x** несвободна для терма **y** в формуле $\exists y R(x, y)$.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\exists$ подставить «несвежую» константу, то **выполнимая таблица**

$$-\, L\exists : \ \frac{\langle\ \exists x\ P(x) \mid P(c)\ \rangle}{\langle\ P(c) \mid P(c)\ \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу** .

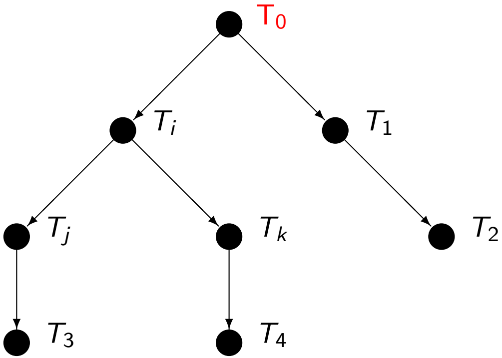
Причина в том, что константа, подставляемая вместо переменной **x**, должна быть отлична от всех ранее использованных констант.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, вершинами которого служат семантические таблицы и при этом

1) корнем дерева является таблица T_0;



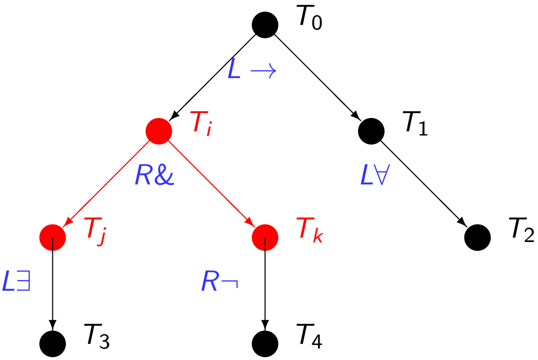
ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

2) из вершины T_i исходят дуги в вершины T_j (T_k)

$\Longleftrightarrow$

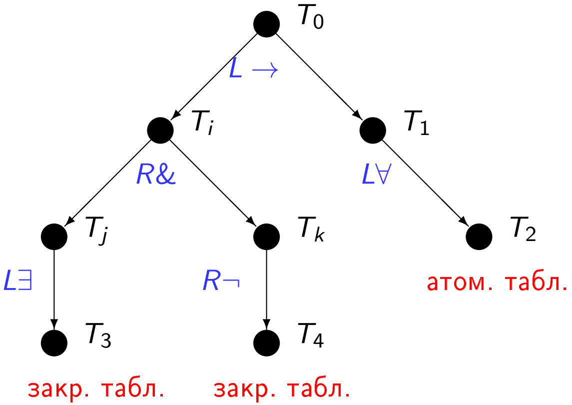
$\dfrac{T_i}{T_j,\ (T_k)}$ — правило табличного вывода;



Табличный вывод

Определение табличного вывода

3) листьями дерева могут быть только закрытые и атомарные таблицы.



Табличный вывод

Определение табличного вывода

Табличный вывод будем называть успешным (или табличным опровержением), если дерево вывода — конечное, и все листья дерева — закрытые таблицы.

Существование успешного вывода означает, что корневая семантическая таблица T_0 невыполнима.

Если $T_0 = \langle\, \emptyset \mid \varphi \,\rangle$, то это означает, что $\models \varphi$.

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle \\
\big\downarrow \ (R \to) \\
T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle \\
\big\downarrow \ (R \to) \\
T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R \to) \\
T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R \to) \\
T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R\forall) \\
T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R \to) \\
T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R \to) \\
T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R\forall) \\
T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (L\forall) \\
T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R \to) \\
T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R \to) \\
T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (R\forall) \\
T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (L\forall) \\
T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle \\
\Big\downarrow \ (L\forall) \\
T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle
\end{array}
$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (R \to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (R \to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (L\forall)$$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (L\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\swarrow \quad (L \to) \quad \searrow$$

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), B(c), P(c) \mid B(c) \rangle \qquad T_7 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c), P(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle (R \to)}$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle (R \to)}$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle (R\forall)}$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle (L\forall)}$$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle (L\forall)}$$

$$T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\swarrow \quad {\scriptstyle (L \to)} \quad \searrow$$

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c) \rangle \qquad T_7 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c), P(c) \rangle$$

$$\forall x P(x), B(c), P(c) \qquad\qquad \forall x P(x), P(c)$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (R \to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (R \to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (L\forall)$$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (L\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\swarrow \quad (L \to) \quad \searrow$$

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c) \rangle \qquad T_7 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c), P(c) \rangle$$

$$\forall x P(x), B(c), P(c) \qquad\qquad \forall x P(x), P(c)$$

закрытая таблица   закрытая таблица

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \to \forall x P(x)\ \rangle$$

$$
\begin{tikzcd}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x)\ \rangle \arrow[d, "(R \rightarrow)"] \\
T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle
\end{tikzcd}
$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \to \forall x P(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (R \to)$$

$$T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow (L\exists)$$

$$T_2 = \langle\ P(c_1) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$
\begin{tikzcd}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x (P(x) \to \forall x P(x)\ \rangle \arrow[d, "(R \to)"] \\
T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle \arrow[d, "(L\exists)"] \\
T_2 = \langle\ P(c_1) \mid \forall x P(x)\ \rangle \arrow[d, "(R\forall)"] \\
T_3 = \langle\ P(c_1) \mid P(c_2)\ \rangle
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \to \forall x P(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ {\color{blue}(R\to)} \\
T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ {\color{blue}(L\exists)} \\
T_2 = \langle\ P(c_1) \mid \forall x P(x)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ {\color{blue}(R\forall)} \\
T_3 = \langle\ P(c_1) \mid P(c_2)\ \rangle
\end{array}
$$

атомарная таблица

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \ (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ (R \to) \\
T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ (L\forall) \\
T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\big\downarrow (R \to) \\
T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\big\downarrow (L\forall) \\
T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\big\downarrow (R\exists) \\
T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow (R \to) \\
T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow (L\forall) \\
T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow (R\exists) \\
T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow (L\exists) \\
T_4 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ (R\to) \\
T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ (L\forall) \\
T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ (R\exists) \\
T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ (L\exists) \\
T_4 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle \\
\Big\downarrow\ (R\forall) \\
T_5 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid P(c_2,c_4), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle
\end{array}
$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\exists)$$

$$T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_4 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid P(c_2,c_4), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow$$

$$\infty$$

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Лемма о корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода
$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2).

Корректность табличного вывода

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $\quad L\to\colon \dfrac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi | \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta\rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta\rangle}.$

Таблица $\langle \Gamma, \varphi \to \psi | \Delta\rangle$ выполнима $\iff$ существует интерпретация I и набор $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \ldots, d_n\rangle$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi \to \psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \iff \begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \text{ или } I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \text{ или } \begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \iff$$

одна из таблиц $T_1 = \langle \Gamma, \psi | \Delta\rangle$ или $T_2 = \langle \Gamma | \varphi, \Delta\rangle$ выполнима.

Корректность табличного вывода

Доказательство леммы

Аналогично доказывается корректность остальных 7 правил для логических связок

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle}$.

Таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$ выполнима $\iff$ существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Пусть $d_0 = t[d_1, \dots, d_n]$. Тогда

$$I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \;\Rightarrow\; I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n] \;\Rightarrow\; I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \dots, d_n].$$

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации I.

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что переменная x_0 свободна для терма t в формуле φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\exists\colon \dfrac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle}$.

Очевидно, что выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ влечет выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$

Допустим, что выполнима таблица $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$. Тогда существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\exists x \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Выполнимость $\exists x \varphi[d_1, \dots, d_n]$ означает, что существует такой элемент $d_0 \in D_I$, что $I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n]$.

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию J, которая отличается от I, только тем, что в J константа c имеет другое значение, а именно $\bar{c} = d_0$.

Тогда $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$.

Кроме того, $J \models \Gamma[d_1, \dots, d_n]$ и $J \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n]$.

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации J.

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что константа c не входит в состав формул из Γ, Δ и формулы φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы T_0 существует успешный табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима.

Доказательство

Следует из

- определения табличного вывода,
- леммы о корректности правил табличного вывода,
- и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц.

Следствие

Если для таблицы $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ |\varphi\ \rangle$ можно построить успешный табличный вывод, то $\models \varphi$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 4.